黄金菱形と白銀二乗菱形による平面充填（タイル貼り）

２０１２年1月１５日

金　原　博　昭

黄金比とは $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，白銀二乗比とは白銀比１：$\sqrt{2}$ の二乗，すなわち １：２の比のことである．また，黄金菱形とは対角線の長さの比が黄金比になる菱形のことであり，白銀二乗菱形とは対角線の長さの比が白銀二乗比になる菱形のことである．２０１０年６月末，筆者は，「黄金菱形と白銀二乗菱形の組み合わせで平面充填が可能になる」という事実を新たに見出したが，この論文はそれをあらためて纏めたものである．

黄金菱形の鋭角は 63°26’，鈍角は 116°34’である．また、白銀二乗菱形の鋭角は 53°08’，鈍角は 126°52’である．それゆえ，黄金菱形の鈍角２つに白銀二乗菱形の鈍角１つを足すと 360°になり，黄金菱形の鋭角４つに白銀二乗菱形の鋭角２つを足しても 360°になる．これは，黄金菱形と白銀二乗菱形の組み合わせで平面充填（タイル貼り）が可能になることを意味している（図１参照）．これは周期的なタイル貼りである．

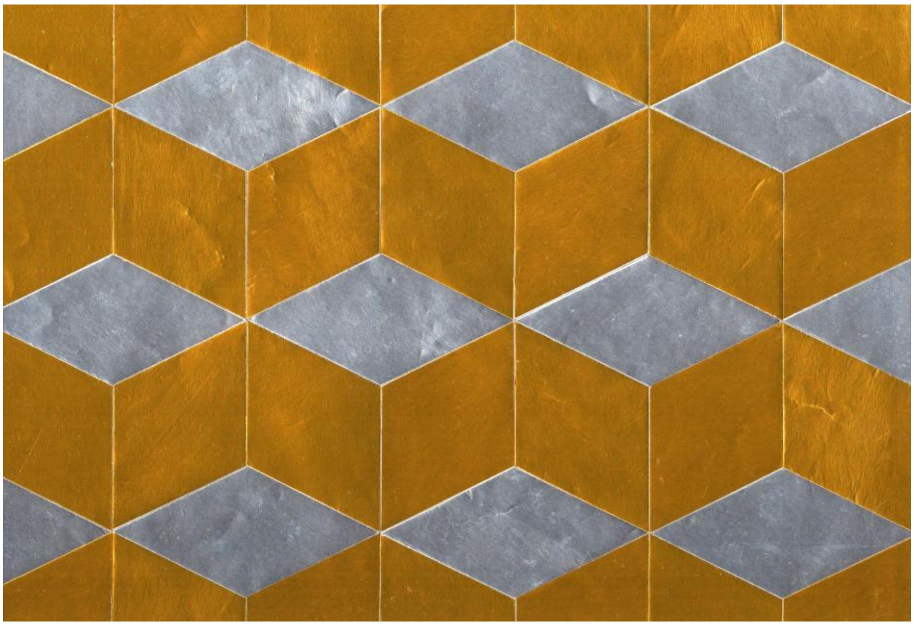

図1　黄金菱形と白銀二乗菱形によるタイル貼り

（金色の菱形が黄金菱形、銀色の菱形が白銀二乗菱形）

ひとつの種類の正多角形だけで平面を埋め尽くすパターンは『正タイル貼り』と呼ばれ，全部で３種類が存在する．また，各頂点のまわりに２種類以上の正多角形が同じ状態で周期的に集まっている場合は『アルキメデスの半正タイル貼り』と呼ばれ，全部で８種類がある．たとえば，正ａ角形，正ｂ角形，正ｃ角形がこの順で各頂点まわりに集まっているとき，半正タイル貼り記号（a，ｂ，ｃ）が与えられる．これらの半正タイル貼りについて，各正多角形の中心を頂点とすると，まったく新しいタイル貼りが生まれる．それを『半正タイル貼りの双対タイル貼り』と呼ぶ．これらのタイル貼りもすべて周期的である．

半正タイル貼りの１つ（3, ６, 3, ６）を考えると，この場合の双対タイル貼りは，２つの正三角形が繋ぎ合わされた菱形１種類だけから構成されるが，上記の新しいタイル貼りは一見これに類似している（図２a，図２b 参照．）

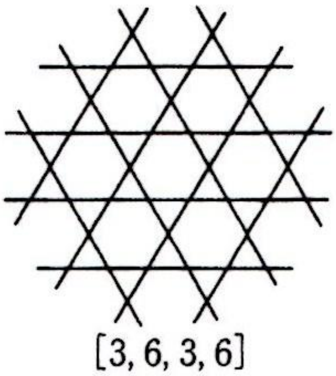

図2a 半正タイル貼り

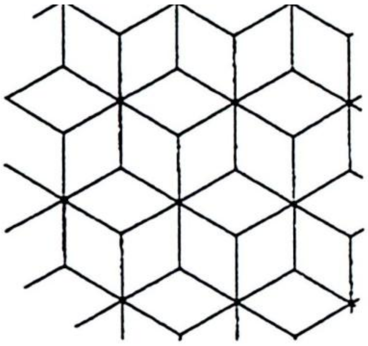

図2b 半正タイル貼り(３, ６, ３, ６)の双対

オックスフォードの有名な物理学者ロジャー・ペンローズは，１９７４年に２種類の非周期的なタイル貼りを発見した. ひとつは矢形と凧形から，そしてもうひとつは２種類の菱形から構成されるが，基本的には同じであり，これらの四角形はすべて正五角形から導き出される．それゆえ，ペンローズのタイル貼りは黄金比に基づいていると言える。それに対し，上記の新しいタイル貼りは黄金比と白銀二乗比に基づいているのである.

黄金菱形と白銀二乗菱形の組み合わせでタイル貼りが可能になるという事実は，これら２つの比の間に密接な関係があることを示している．三次元における黄金比・白銀比間の相互補完性は，すでに２００９年に筆者が見出しているが，この点を考慮すると，この新たなタイル貼りは，「二次元においては黄金比・白銀二乗比間に相互補完性が存在する」ということを示しているように思われる.

●参考文献

[1] 一松　信，「正多面体を解く」，東海大学出版会、２００２

[2] 宮崎興二，「かたちのパノラマ」，丸善、２００３

[3] A・ボイテルスパッヒャー&B・ペトリ（柳井浩訳），「黄金分割 --自然と数理と芸術と--」，共立出版、２００５