

空間充填に関する二、三の結果

佐藤郁郎, 中川 宏, 金原博昭, 秋山 仁

宮城県立がんセンター・研究所・病理 宮城県名取市愛島塩手字野田山 47-1

東海大学・教育開発研究所 東京都渋谷区富ヶ谷 2-28-4

sato-ik510@pref.miyagi.jp, okojoyo@dk.pdx.ne.jp, kimpapa@ksj.biglobe.ne.jp,

ja@jin-akiyama.com

A Few Results on tessellation of the Space

Ikuro SATO, Hiroshi NAKAGAWA, Hiroaki KIMPARA, Jin AKIYAMA

Department of Pathology, Research Institute, Miyagi Cancer Center

Research Institute of Educational Development, Tokai University

Abstract: We introduce a few results on tessellations of the space.

- a) global space filling with copies of cube, regular dodecahedron and Johnson 91.
- b) local space filling with copies of rhombic dodecahedron and rhombic triacontahedron.
- c) complementary role of the golden-silver sections.

Keywords: space filler, icosahedral symmetry, Johnson 91, golden-silver section.

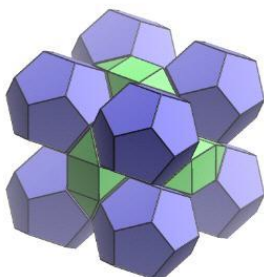
整凸面多面体とは、すべての面が正多角形ですべての辺の長さが等しい凸多面体である。ジョンソン・ザルガラー多面体（以後、JZ多面体という）とは、整凸面多面体のうち、正多面体、準正多面体、アルキメデスの角柱、アルキメデスの反角柱以外のものことである。JZ多面体は全部で92種類あり、それぞれにJ1~J92の番号と名前がつけられている。一方、カタランの多面体とは、準正多面体（アルキメデスの多面体、全部で13種類ある）の双対（面と頂点を入れ替えてできる）多面体のことである。本稿では、空間充填に関する以下の2つの新しい結果を紹介する。

(1) ジョンソン・ザルガラー多面体 J91 を介することによって立方体と正12面体による空間充填が可能となる

(2) カタランの多面体、菱形12面体と菱形30面体の亜種による局所的空間充填から、黄金比と白銀比に相補性が存在する

1. 正12面体と立方体と J91 による空間充填

正方形面からなる立方体は単独で空間充填可能である。一方、正12面体は空間内にどのように配列させても隙間が生じてしまう。ジョンソン・ザルガラー多面体 J91 ($3^8 4^2 5^4$) は菱形12面体と同じ2回回転対称性をもつ14面体である。J91の正三角形面を合



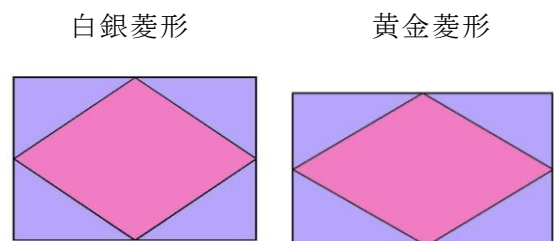
わせるように繋ぐと、立方体と正十二面体の隙間が現れる。そこで、J91・立方体・正十二面体の3種類の立体を3:1:1で組み合わせると空間を充填することが判明した。左に石井源久氏提供の空間充填図を掲げる。この事実より、J91は立方体と正12面体を結びつける重要な役割を果たすと考えることができる。正12面体が加わった上述の空間充填形は現在までに知

られている空間充填形とは異なる．見方を変えれば，この空間充填形は，空間の分割において，すべての連結切断面が正多角形（この場合，正三角形，正方形，正五角形）であるような非自明な分割の存在を示唆していることになる．

2. 3次元的な黄金比と白銀比

カタランの多面体，菱形十二面体の各面の対角線の長さの比は白銀比であり，菱形三十面体の各面のそれは黄金比であることをケプラーは考察した．そこで，菱形十二面体の白銀菱形を黄金菱形で，菱形三十面体の黄金菱形を白銀菱形で置き換える「変形」を「対角線を折り曲げて」施す．すると，各々，対角線で折り曲げる方向（mountain fold, valley fold）に依存して2種類の多面体ができる．即ち，

- (1) 黄金菱形を長軸で山折りにした $m24$ 面体
- (2) 黄金菱形を短軸で谷折りにした $v24$ 面体
- (3) 白銀菱形を長軸で谷折りにした $v60$ 面体
- (4) 白銀菱形を短軸で山折りにした $m60$ 面体の計4種類ができる．



この変形操作によってどのような事態が起こるのだろうか？ 特筆すべきことは，対角線の長軸方向で折り曲げられた2つの多面体(1)(3)において， $m24$ 面体の凸部は $v60$ 面体の凹部にはぴったりはまりこみ，これら2種類の多面体によって空間が充填されることである．その部分の二面角 δ は，

$$\tan \delta = -2(\sqrt{5} - \sqrt{2}) / 3$$

より 151.281° となって，両者は完全に一致する．この鍵となる事実から，黄金比と白銀比は相互補完的な関係にあることが確認される．

わが国の仏教寺院建築，たとえば大和の法隆寺は白銀比長方形の区画の上に建てられている．函館戦争で榎本武揚が立てこもった五稜郭には黄金比がみられるが，古代エジプトのピラミッドの底面の1辺の長さとの高さの比や古代ギリシャのパルテノン神殿の外形にも黄金長方形が使われていることが良く知られている．黄金比は西洋人に愛される形，白銀比は東洋人に好まれる形といわれるが，筆者らの知る限り，黄金比と白銀比は対比されるばかりでこれまで接点が論じられたことがなかった．上述の相補関係は，これら2つの重要な比の橋渡しの第一歩と考えることができる．

3. “One Day Seminar on Math and Art”のご案内

芸術の背後に潜む数理に関するセミナーと展示会を行います．本稿で紹介した美しい模型は6月末に以下の要領で開催されるセミナー会場にて展示される予定です．

日時： 平成22年6月29日（火） 13:00～16:00（予定）

会場： 東海大学代々木校舎

問い合わせ先（講演や出品の申し込み先）：

東海大学教育開発研究所 秋山研究室

TEL: 03-3485-5627, FAX: 03-3485-5628

e-mail: ja@jin-akiyama.com