

大ピラミッド・ペンタグラム二十面体および ピラミッド・ペンタグラム三十面体の創作

金原 博昭

合同な菱形だけで構成されている多面体を『菱形多面体』と呼ぶが、現在存在が確認されている菱形多面体は次の4つだけである。この論文は、菱形多面体の作り方をヒントに新しい多面体を創ってみたものである。

1. ヨハネス・ケプラーが発見した菱形十二面体。これは菱形の鈍角の角度 109.47° 、鋭角の角度 70.53° 、対角線の長さの比が白銀比になっている。これを白銀菱形と呼ぶ。
2. ヨハネス・ケプラーが発見した菱形三十面体。これは菱形の鈍角の角度 116.57° 、鋭角の角度 63.43° 、対角線の長さの比が黄金比になっている。これを黄金菱形と呼ぶ。
3. スタンカ・ピリンスキーが1960年に発見した菱形十二面体第2種 [黄金菱形]。
4. エヴグラフ・ステファノヴィッチ・フェドロフが1885年に発見した菱形二十面体 [黄金菱形]。

[注] 白銀比とは $1:\sqrt{2}$ の比率、黄金比とは $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の比率のことである。

上記の菱形多面体4種類の諸元を表1にまとめた。




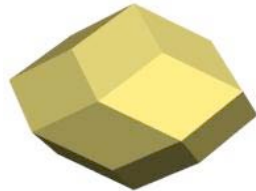
多面体の名前	構成面	辺の数	頂点の数	形状	備考
菱形十二面体	●白銀菱形 12枚	24	14		<ul style="list-style-type: none"> ● <u>双対立体</u>：立方八面体 ● ゾーン多面体の一種 ● 等面菱形多面体 ● 平行多面体
菱形三十面体	●黄金菱形 30枚	60	32		<ul style="list-style-type: none"> ● <u>双対立体</u>：二十・十二面体 ● ゾーン多面体の一種 ● 等面菱形多面体
菱形十二面体 第2種	●黄金菱形 12枚	24	14		<ul style="list-style-type: none"> ● ゾーン多面体の一種 ● 等面菱形多面体
菱形二十面体	●黄金菱形 20枚	40	22		<ul style="list-style-type: none"> ● ゾーン多面体の一種 ● 等面菱形多面体

表1 菱形多面体4種類の諸元

これらの立体のうち、菱形二十面体と菱形十二面体第2種は菱形三十面体に基づいている。菱形三十面体には、その赤道に相当する菱形10枚のベルトがあるが、このベルトを取り除くと菱形二十面体になる。さらに、この菱形二十面体には8枚の菱形から成るベルトがあるが、このベルトをカットすると菱形十二面体第2種が出来る。

同様の手法を適用することにより、菱形二十面体面から曲面を用いた菱形十五面体をつくることができる。その具体的な手順は下記の通り。

- ① 菱形二十面体には、表側(あるいは上側)と裏側(あるいは下側)各々にペンタグラムがあり、これらの面は両方で10枚である(図1a参照)。図1bが示すように、残りの10面は菱形5枚のベルト2本から構成されており、これらの菱形ベルトは各菱形の鋭角の先端で繋がっている。図1bにおいて、上側のベルトが赤色、下側のベルトが黄色で示されている。



図 1a 菱形二十面体(上面)

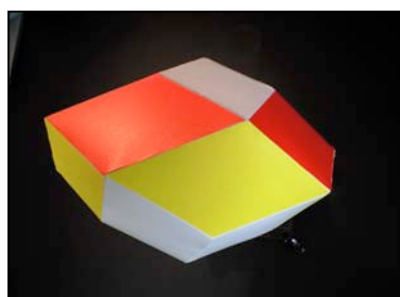


図 1b 菱形二十面体(側面)

- ② これらのベルトの1本を取り除く。たとえば上側の赤色ベルトを取り除き、上側のペンタグラムを36度回転して残りの部分とくっつけると菱形十五面体になる。これを白銀菱形でつくと、図2aおよび図2bのような菱形十五面体ができる。この立体の各面は平面ではなく、ややカーブを描いた曲面になっている。
- ③ この『曲面を用いた菱形十五面体』は、上側・下側2つのペンタグラムを構成する菱形10枚と側面を構成する菱形5枚から成っている。図2aおよび図2bにおいて、側面の菱形が黄色で示されている。



図 2a 曲面を用いた菱形十五面体(上面)



図 2b 曲面を用いた菱形十五面体(斜め側面)

この15枚の白銀菱形を2分割し、側面の菱形5枚を内側に折り込むと、ペンタグラムが一層際立つ三十面体になる。この立体の各面は二等辺三角形であり、上記の4種類の菱形多面体と同様にすべて平面

である。白銀菱形 5 枚が 2 分割されて出来た 10 枚の二等辺三角形が、各々上側と下側のペンタグラムを構成する。これらのペンタグラムの中央にある図形は正五角形である (図 3a, 3b 参照)。これは、白銀菱形に基づくこの立体が黄金比をも包含していることを示している。ペンタグラムの 5 つの先端は正四角錐になっている。それゆえ筆者はこれを『ピラミッド・ペンタグラム三十面体』と名付けた。



図 3a 上面



図 3b 斜め側面

ピラミッド・ペンタグラム三十面体

さて、上記の『曲面を用いた菱形十五面体』を黄金菱形でつくり、側面の菱形 5 枚を各々二等辺三角形 2 枚に分割して内側に折り込むと、再び美しいペンタグラム二十面体ができる。黄金菱形 10 枚が上側・下側 2 つのペンタグラムを構成し、黄金菱形を 2 分割した三角形 10 枚が側面を構成する。この立体の面もすべて平面である。

この立体もペンタグラムの先端が正四角錐形状になっているが、これらはエジプト・ギザの大ピラミッドと全く同じ形状である。なぜなら、大ピラミッド側面を構成する二等辺三角形は、黄金菱形の半分に等しいからである。それゆえこれを、「5 つのピラミッドから構成される立体」とみなすこともできる。なお、黄金比に基づくこの立体は白銀比をも包含している。その理由は、白銀比がピラミッド底面の正方形に内在しているからである。上記の『ピラミッド・ペンタグラム三十面体』に対比されるこの立体は、『大ピラミッド・ペンタグラム二十面体』と名付けられた (図 4a, 図 4b, 図 4c 参照)。



図 4a 上面



図 4b 側面



図 4c 斜め側面

大ピラミッド・ペンタグラム二十面体

図 5, 図 6, 図 7 は、それぞれ上記の『曲面を用いた菱形十五面体』、『ピラミッド・ペンタグラム三十面体』、および『大ピラミッド・ペンタグラム二十面体』の展開図(糊代付き)である。図 6 においては白銀菱形 15 枚が 2 分割されて全部で 30 面になっており、図 7 においては黄金菱形 15 枚のうちの 5 枚が 2 分割されて全部で 20 面になっている。

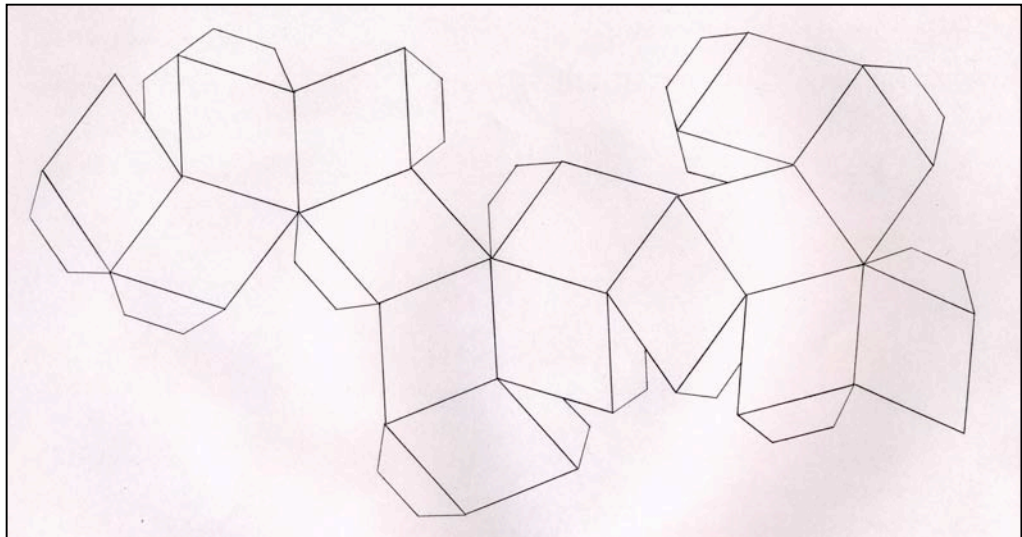


図5 曲面を用いた菱形十五面体の展開図（糊代付き）

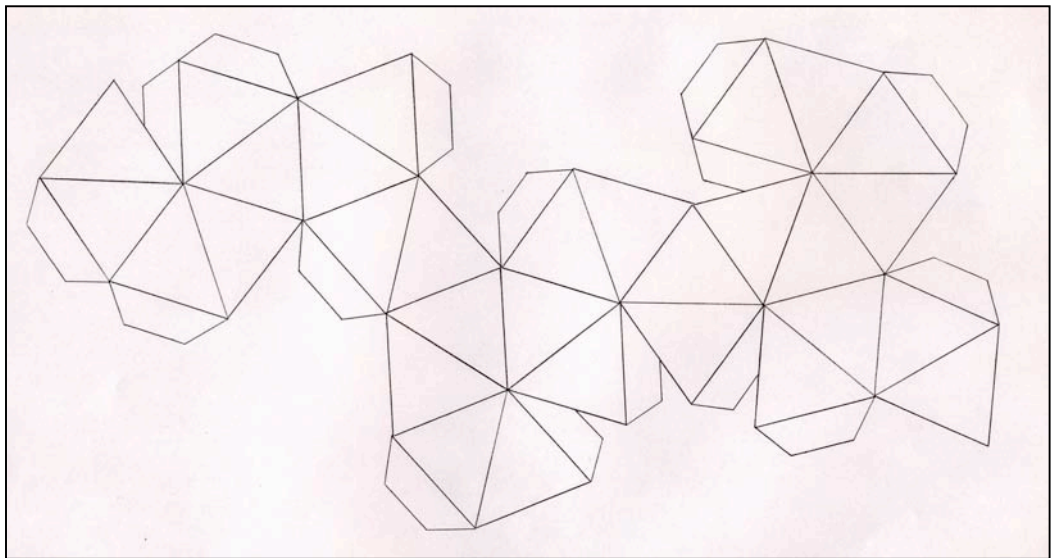


図6 ピラミッド・ペンタグラム三十面体の展開図（糊代付き）

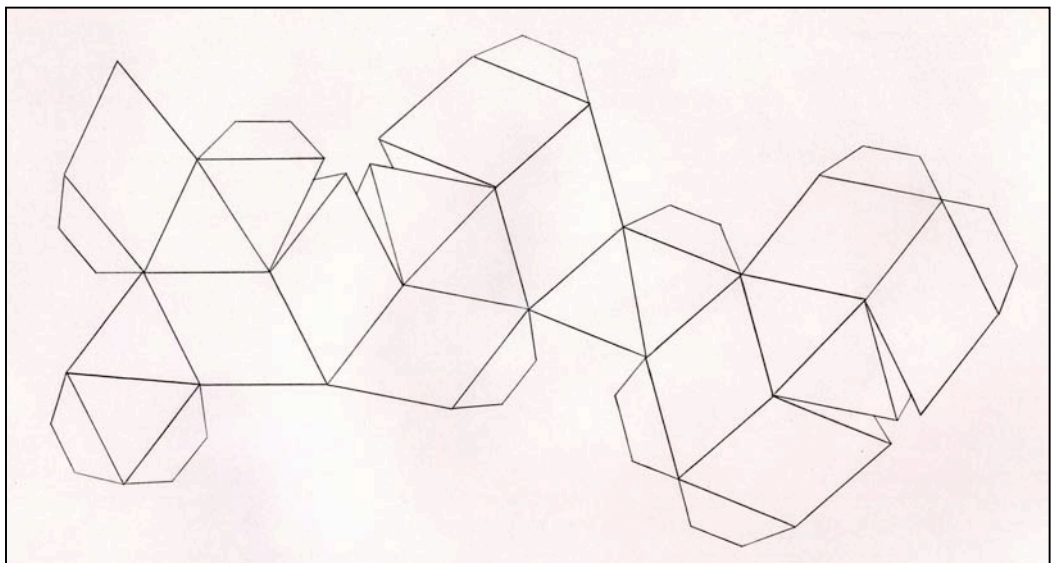


図7 大ピラミッド・ペンタグラム二十面体の展開図（糊代付き）

上記の3種類の新しい立体の諸元を表2にまとめた。

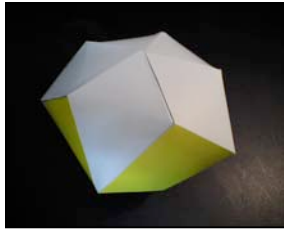

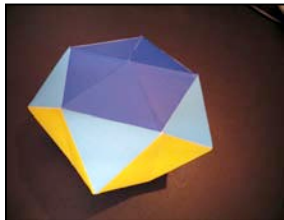



多面体の名前	構成面	辺の数	頂点の数	形状	備考
曲面を用いた 菱形十五面体	●白銀菱形 15枚	30	17		<ul style="list-style-type: none"> ●等面菱形多面体. ●表と裏が各々ペンタグラム形状. ●各面は平面ではなく、ややカーブを描いた曲面である.
ピラミッド・ ペンタグラム 三十面体	●白銀菱形 を2分割し た三角形 30枚	60	32	 	<ul style="list-style-type: none"> ●表と裏が各々ペンタグラム形状. ●ペンタグラムの5つの先端が正四角錐形状. ●ペンタグラム中央の正五角形は、白銀菱形に基づくこの立体が黄金比をも包含していることを示す.
大ピラミッ ド・ペンタグ ラム二十面体	●黄金菱形 10枚 ●黄金菱形 を2分割し た三角形 10枚	35	17	  	<ul style="list-style-type: none"> ●表と裏が各々ペンタグラム形状. ●ペンタグラムの5つの先端がエジプト・ギザの大ピラミッドと全く同じ形状（ピラミッドの傾斜角：$51^{\circ}49'38''$，側面を構成する二等辺三角形の底角：$58^{\circ}17'06''$）. ●黄金比に基づくこの立体は白銀比をも包含している．その理由は、白銀比がピラミッド底面の正方形に内在しているため.

表2 曲面を用いた菱形十五面体，ピラミッド・ペンタグラム三十面体，大ピラミッド・ペンタグラム二十面体の諸元

参考文献

- [1] P.R.クロムウェル(下川航也 他 訳)『多面体』シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001)
- [2] アンドレ・ポシャン(青木伸美訳)『ピラミッドの謎はとけた』大陸書房 (1982)
- [3] 山口陸幸 『多面体の世界へようこそ』(<http://www5d.biglobe.ne.jp/~MY55029/index.htm>)